• FOLHA Nº 05 – GABARITO COMENTADO •

1) Para o número ser divisível por 45, ele deve ser divisível por 5 e 9 simultaneamente.

Para ser divisível por 5, b deve ser 0 ou 5.

Para ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser múltipla de 9. Vamos separar em dois casos:

b = 0

m = 488a90, a soma dos algarismos é 29 + a. A única possibilidade é a = 7

b = 5

m = 488a95, a soma dos algarismos é 34 + a. A única possibilidade é a = 2.

Em ambas a soma a + b = 7.

OPÇÃO B

2) A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual à 9 + 9 = 18. Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

OPÇÃO D

3) Estamos procurando números n^2 satisfazendo $40000 \leq n^2 \leq 640000$ tal que n^2 seja múltiplo de 3, 4 e 5. Calculando a raiz quadrada, temos que $200 \leq n \leq 800$ com n múltiplo de 2, 3 e 5, ou múltiplo de 2 x 3 x 5 = 30. São eles: $7 \times 30 = 210$; $8 \times 30 = 240$;........; $25 \times 30 = 750$ e $26 \times 30 = 780$. São ao todo, 26 – 7 + 1 = 20 números.

LETRA B

4) Como 2010 = 67 x 3 x 5 x 2 e qualquer número de conjunto {3 x 5, 3 x 2, 5 x 2, 3 x 5 x 2, 3, 5, 2, 1} é menor que 32, concluímos que 2010 não serve para Esmeralda. Contudo, 2009 = 41 x 49 satisfaz as condições impostas por Esmeralda. Jade recebe 2011 – 2009 = 2 balas

OPÇÃO B

5) $a^2 - b^2 = 0 \rightarrow (a + b) \cdot (a - b) = 0$, como $b \neq 0 \rightarrow a \neq 0$, se não (a – b) seria negativo.

Logo (a + b) = 1 ou (a – b) = 1

$a - b = 1 \rightarrow a = b + 1$

Logo "a" é o consequente de b.

OPÇÃO B

6) A primeira condição nos diz que $n \geq 55$ e a segunda que $n \leq 59$. Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando n = 56, 57, 58 ou 59

OPÇÃO A

7) Temos quatro opções para o número formado pelos dois últimos algarismos dos números escritos em que soma dos dois últimos é maior que a dos dois primeiros algarismos: 41, 14, 24 ou 42. Para cada uma dessas opções, temos duas maneiras e posicionarmos os outros dois algarismos dentre os dígitos que faltam. Logo, existem tais números 2 . 4 = 8 números

OPÇÃO A

8) As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma 8x + 9y +10z com x, y e z inteiros não negativos. Todo número maior que 56 = (8 – 1)(9 – 1) pode ser escrito na forma 8x + 9y com x e y inteiros não negativos. Um número que pode ser escrito na forma 8x + 9y em particular também pode ser escrito na forma 8x + 9y +10z . Assim, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. É fácil verificar, como na primeira solução, que todos os números de 32 até 55 podem ser escritos na forma 8x + 9y +10z e que 31 não.

OPÇÃO D

9) Como cada pergunta admite duas respostas, cada entrevistado pode responder o questionário de 16 maneiras diferentes. Assim, o número mínimo de entrevistados para que se garanta a existência de duas respostas completamente iguais é 17, pelo Princípio da Casa dos Pombos.

OPÇÃO B

10) Entre o dia 29 de fevereiro de um ano bissexto e o dia 29 de fevereiro do próximo ano bissexto, passam-se $366 + 365 + 365 + 365 = 1461$ dias. Como 1461 deixa resto 5 na divisão por 7, teremos o seguinte:
29 de fevereiro de 2012: quarta-feira
29 de fevereiro de 2008: sexta-feira
29 de fevereiro de 2004: domingo
Os dias de semanas se repetem de 28 em 28 anos. Assim, se 29 de fevereiro de 2004 foi domingo, é porque dia 29 de fevereiro de 1976 também foi domingo.

OPÇÃO B

11) Para determinarmos a quantidade de zeros, basta determinarmos a quantidade d e vezes que o número 5 aparece no produto.
Pelo teorema de Legendre, temos

$$\left[\frac{127}{5}\right]+\left[\frac{127}{25}\right]+\left[\frac{127}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31 \text{ zeros}$$

OPÇÃO B

12) Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter $X = 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9; $Y = 2, 3, ..., 9$ e $Z = 5, 6, 7, 8$ ou 9. Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja $6 \times 8 \times 5 = 240$.

OPÇÃO B

13) $x^2 - y^2 = (x + y) . (x - y) = 2^2 . 3$
como x e y são inteiros, a única possibilidade que nos serve é:
$x + y = 6$ ou $x + y = 2$
$x - y = 2$ $\quad x - y = 6$
o que nos fornece dois pares.

OPÇÃO C

14) Seja x a quantia que Caio tinha inicialmente. Ele saiu da 1ª loja com $x/2 - 1$, saiu da 2ª loja com $x/4 - 3/2$, saiu da 3ª loja com $x/8 - 7/4$, saiu da 4ª loja com $x/16 - 15/8$. Como ele gastou todo dinheiro segue que $x/16 - 15/8 = 0$, ou seja $x = 30$

OPÇÃO C

15) $300 = 2^2 . 3 . 5^2$
$250 = 2 . 5^3$
$100 = 2^2 . 5^2$
Mdc $(300, 250, 100) = 2 . 5^2 = 50$
Cada kit terá:
Lápis = 6
Borracha = 5
Caderno = 2

16) Seja H o número de filhos homens e M o número de filhas mulheres. As afirmações são equivalentes à $H - 1 = M + 3$ e $H = 2(M - 1)$. Resolvendo o sistema, temos: $M = 6$ e $H = 10$, logo a quantidade de filhos é 16.

OPÇÃO C

17) O segundo comitê dessa campanha recebeu, em reais, a quantia de
Sejam x, y, z e w o que receberam os 4 comitês:
$y = x/2$ $\qquad z = (x + y)/2$ $\qquad w = z/2$
de modo que $x + y + z + w = 210000$
$2y + y + 3y/2 + 3y/4 = 210000$
$3y + 9y/4 = 210000$
$21y = 840000$
$y = 40000$

OPÇÃO A

18) Sendo A, B, C e D os números dos meses em que Ana, Beatriz, Cristina e Dalva nasceram, respectivamente, temos que $D = A + 2$, $D = C - 4$ e $B = D + 8$. Assim, temos que $A = D - 2$, $C = D + 4$ e $B = D + 8$. Daqui, concluímos que $A \geq 1 \rightarrow D \geq 3$ e que $B \leq 12 \rightarrow D \leq 4$. E isso nos dá duas possibilidades:

- Ana nasceu em janeiro, Beatriz em novembro, Cristina em julho e Dalva em março.
- Ana nasceu em fevereiro, Beatriz em dezembro, Cristina em agosto e Dalva em abril.

Pelo enunciado, no qual uma delas nasceu em março, concluímos, portanto, que esta só pode ser Dalva.

OPÇÃO D

19) Seja x = rotor, y = turbina e z = sistema de freio. Podemos montar o seguinte sistema:

$x + 3y + z = 33000$

$2x + 7y + 2z = 76000$

$x + y + z = k$

podemos reescrever as duas primeiras equações como:

$k + 2y = 33000$

$2k + 5y = 76000$

Multiplicando a primeira equação por 5 e a segunda por 2 e subtraindo ambas, temos:

$5k + 10y = 165000$

$4k + 10y = 152000$

$K = 13000$

OPÇÃO B

20) x = quantidade de cocos que eles colheram.

1º Homem: dá um coco para o macaco, pega $x - 1/3$ cocos para ele, sobrando $2(x - 1)/3$ cocos.

2º Homem: dá um para o macaco, pega $\{[2(x - 1)/3] - 1\}/3$ cocos para ele e sobram $4(x - 1)/9 - 2/3$ cocos.

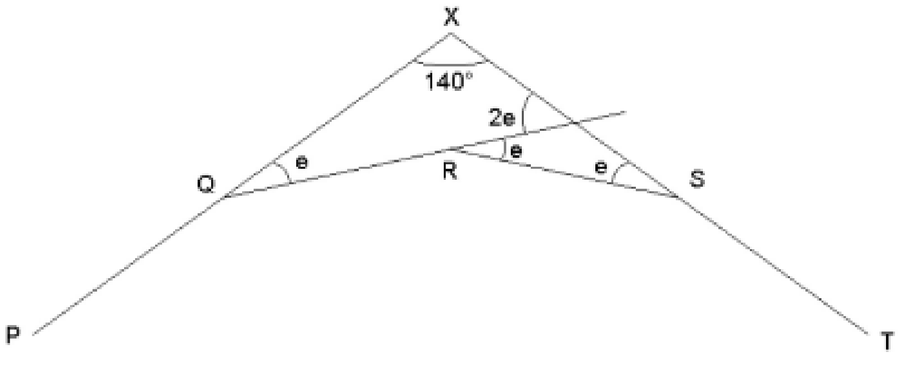
3º Homem: dá um para o macaco, pega $\{[4(x - 1)/9] - 5/3\}/3$ cocos para ele e sobram $8(x - 1)/27 - 10/9$ cocos.

De manhã há ainda $8(x - 1)/27 - 10/9$ cocos. Dando um coco para o macaco sobram $8(x - 1)/27 - 10/9 - 1$ cocos e esse número deve ser múltiplo de 3. Com isso temos, $8(x - 1)/27 - 10/9 - 1 = 3k$ que nos fornece a equação $8x - 81y = 65$. Resolvendo essa equação

temos $x = 79$.

OPÇÃO D

21) Prolongue QR até encontrar o segmento XS. Através da figura, podemos encontrar o valor do ângulo externo do polígono, que deve ser 360° dividido pelo número de lados *n*.



$$3e + 140° = 180° \Leftrightarrow 3e = 40° \Leftrightarrow \frac{360°}{n} = \frac{40°}{3} \Leftrightarrow n = 27°$$

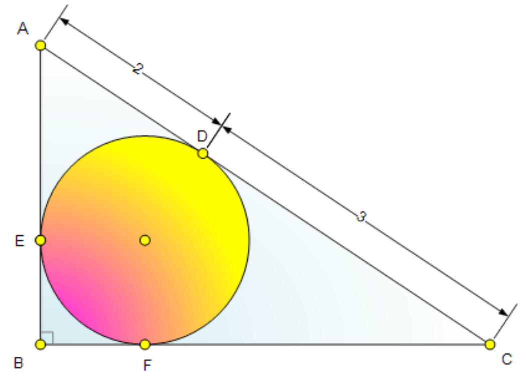
OPÇÃO D

22) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por: $S = (n - 2) \cdot 180°$. Chamando o ângulo desconhecido de α, temos: $2004° + \alpha = (n - 2) \cdot 180°$. Como $0 < \alpha < 180°$, temos: $2004º < 2004° + \alpha < 2184°$

$2004° < (n - 2) \cdot 180° < 2184° \rightarrow 11{,}1 < (n - 2) < 12{,}1 \rightarrow n - 2 = 12 \rightarrow n = 14$

OPÇÃO A

23) A área do triângulo ABC é dado pelo produto AD x DC = 2 x 3 = 6

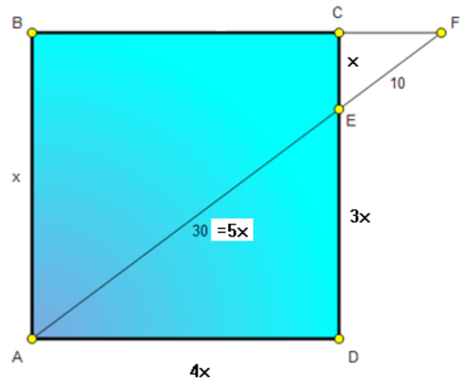


$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Como o raio do círculo inscrito num triângulo retângulo é igual a (p – a),

logo: S = (p – b) (p – c) = 2 x 3 = 6

OPÇÃO B

24) Como os triângulos ADE e CEF são semelhantes, podemos afirmar que CE e DE são proporcionais a 1 e 3.



Daí, x = 6

• Como o lado AB = 4x = 24 cm

OPÇÃO A

25) O ângulo entre as retas *AC* e *BD* é 90 graus. Como *B'D'* foi obtido a partir de uma rotação de 25 graus de *BD*, o ângulo entre as *AC* e *B'D'* é 25 graus menor, sendo igual a 90 – 25 = 65 graus.

OPÇÃO D

26) Primeiro observamos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $\frac{(5-2).180°}{5} = 108°$.

Como $AF = AE = AB$, o triângulo ABF é isósceles com $m(A\hat{B}F) = m(A\hat{F}B) = \frac{180° - m(B\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - m(B\hat{A}E) - m(E\hat{A}F)}{2} =$

$= \frac{180° - 108° - 60°}{2} = 6°$.

No triângulo PEF, $m(E\hat{F}P) = m(A\hat{F}E) - m(A\hat{F}B) = 60° - 6° = 54°$ e

$m(E\hat{P}F) = 180° - m(P\hat{E}F) - m(E\hat{F}P) = 180° - 60° - 12° - 54° = 54°$, ou seja, o triângulo PEF é isósceles com PE = EF.

Assim, como EF = AE, o triângulo PEA também é isósceles com

$m(P\hat{A}E) = m(E\hat{P}A) = \frac{180° - m(P\hat{E}A)}{2} = \frac{180° - 12°}{2} = 84°$.

Além disso, $m(C\hat{A}B) = \frac{180° - m(A\hat{B}C)}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ e $m(C\hat{A}E) = m(B\hat{A}E) - m(C\hat{A}B) = 108° - 36° = 72°$.

Logo, $m(P\hat{A}C) = m(P\hat{A}E) - m(C\hat{A}E) = 84° - 72° = 12°$.

OPÇÃO A

27) Como KF // GD, os triângulos KFC e CDG são semelhantes.

Logo: $\frac{CF}{CD} = \frac{x}{5}$

Repare também que os triângulos DFK e CDE são semelhantes

$\frac{DF}{CD} = \frac{x}{2}$

Percebe–se que $\frac{CF}{CD} + \frac{DF}{CD} = 1$ temos:

$\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 1$, logo temos x = 10/7

OPÇÃO D

28) Considere a figura.

Como $\overline{BC} = \overline{CD}$ e $AC \perp BD$, segue que $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Queremos calcular $2 \cdot \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{AF}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, vem

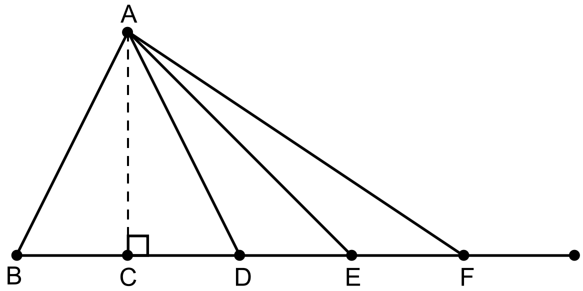
$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow \overline{AB} = 15$ m.

Analogamente, para os triângulos ACE e ACF, obtemos

$\overline{AE}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{AC}^2 = 18^2 + 12^2 = 468 \Rightarrow \overline{AE} = 6\sqrt{13}$ m

e

$\overline{AF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AC}^2 = 27^2 + 12^2 = 873 \Rightarrow \overline{AF} = 3\sqrt{97}$ m.

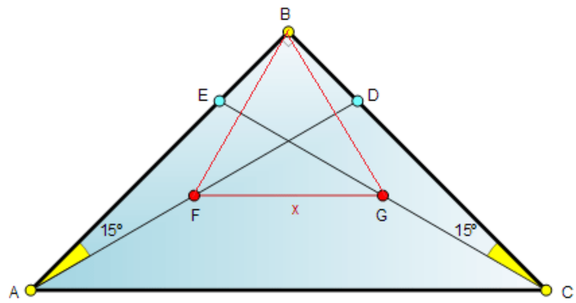


Portanto, o resultado pedido é:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{AF} &= 2 \cdot 15 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97} \\ &= (30 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97})\text{ m}. \end{aligned}$$

OPÇÃO D

29) Como F e G são os pontos médios de AD e CE, e os triângulos ABD e BCE são retângulos, BF e BG são medianas (metade da hipotenusa).



Observe que o triângulo BFG é equilátero de lado igual a 1.

OPÇÃO B

30) y = 18 . 0,5 = 9 km

Logo, $x^2 + 9^2 = 15^2 \rightarrow x = 12$ km

Depois de uma hora de viagem as distâncias serão dobradas, portanto, a distância entre os navios B e C será de 30 km.

A velocidade do navio C é de 12 km a cada meia hora, ou seja, 24 km/h.

OPÇÃO C